L7 極限的四則運算 極限的多項式

四則運算的定理 $\boxed{\text{If } \lim_{x\to c} f(x)=L,\ \lim_{x\to c} g(x)=M}$, then

$\boxed{\lim_{x\to c} [f(x)+ g(x)]=L+M}$

$\boxed{\lim_{x\to c} [\alpha f(x)]=\alpha L}$

$\boxed{\lim_{x\to c} [f(x)g(x)]=LM}$

$\boxed{\lim_{x\to c} [f(x)/g(x)]=L/M}$ 備註：分母的極限不爲 0

If 要先滿足才能做極限的運算，則滿足定理的條件。

Rmk:

1.①與②可推得 $\lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=L-M$.

Q:如何推得？A:因爲假設的它的極限存在。$\lim_{x\to c} f(x)=L$,
Q:$\lim_{x\to c} -g(x)=?$會不會存在，A:會，因爲②成立。
By the way~數學上因爲~所以，只用在定義定理。因爲用 If，所以用 then。

$\because \lim_{x\to c} g(x)=M$, $\therefore \lim_{x\to c} -g(x)=-M$.

$\because \lim_{x\to c} f(x)=L$, $\therefore \lim_{x\to c} (f(x)+(-g(x))=L+(-M)=L-M$.

$\Rightarrow \lim_{x\to c}[f(x)-g(x)]=L-M$

Q:三個函數能不能四則運算？A:能，但三個函數的極限要先存在。

If $\lim_{x\to c} f(x)=L$, $\lim_{x\to c} g(x)=M$, $\lim_{x\to c} h(x)=N$,

$\lim_{x\to c} [f(x)+ g(x)+h(x)]= \lim_{x\to c} [(f(x)+ g(x))+h(x)]$.

$\because \lim_{x\to c} f(x)=L$ and $\lim_{x\to c} g(x)=M$

$\therefore \lim_{x\to c}[f(x)+g(x)]=L+M$

$\because \lim_{x\to c} h(x)=N$

$\therefore \lim_{x\to c} [(f(x)+ g(x))+h(x)]=(L+M)+N$

$\Rightarrow \lim_{x\to c} [(f(x)+ g(x))+h(x)]=L+M+N$ n 個四個運算，要有 n 個條件。

L7 極限的四則運算 極限的多項式

Q:為什麼要討論極限四則運算，這個定理？
A:因為當初用 ε-δ 證明極限的存在非常的困難。我們希望透過一台機器，來幫我們判定哪些函數極限會存在，來幫我們製造極限會存在的機器。

Q:我要如何能用這個機器？
A:第一個 要先放入兩個函數的極限存在
Q:要放入哪兩個？
A: f(x)=1,g(x)=x
By the way~現在證明極限存在可以用定義，可以用定理。

Thm:用 ε-δ 證明極限存在

① $\boxed{\lim_{x\to c} c=c}$

Let $\varepsilon>0$, $|c-c|=0<\varepsilon$,

Take $\delta=\mathbb{R}$

Then $\forall$ x in $0<|x-c|<\delta$, $|f(x)-c|<\varepsilon$.

Therefore $\lim_{x\to c} c=c$

② $\boxed{\lim_{x\to c} x=c}$

Let $\varepsilon>0$, $|x-c|<\varepsilon$,

Take $\delta=\varepsilon$

Then $\forall$ x in $0<|x-c|<\delta$, $|f(x)-c|<\varepsilon$.

Therefore $\lim_{x\to c} x=c$

Q:現在把這個兩函數丟到這台機器，做出來的是什麼？
A:多項式

Note:用函數 1 與 x 下去做+、-、×、÷可以得到任意多項式

$Pn(x)=a_n x^n-a_{n-1}x^{n-1}\cdots a_0$

L7 極限的四則運算 極限的多項式

Thm: $\boxed{\text{Let } P_n(x)= a_n x^n - a_{n-1} x^{n-1} \cdots a_1 x + a_0 \text{ be a polynomial.給一個多項式,Then}}$

$\boxed{\lim(x\to c)P_n(x)=P_n(c).}$

pf: $\because \lim(x\to c)1=1$ and $\lim(x\to c)x=c$,

$\therefore \lim(x\to c)P_n(x)= a_n c^n - a_{n-1} c^{n-1} \cdots a_1 c + a_0 = P_n(c)$

口語：多項式的極限永遠存在，且等於該點的函數值。

Q:現在再把多項式作除法運算，會得到什麼？
A:可得 Rational function 有理函數

Thm: $\boxed{\text{Let } R(x)=P(x)/Q(x) \text{ be a rational function.}}$

$\boxed{\text{也就是兩個多項式相除 P and Q are polynomial}}$ i.e.也就是說=That is

$\boxed{\text{If } Q(c)\neq 0,\text{then } \lim(x\to c)R(x)=P(c)/Q(c)=R(c)}$

口語：如果 polynomial 在 c 點有定義，則 c 點的函數值存在，且等於該點的極限值。

Thm: $\boxed{\text{If } \lim(x\to c)f(x)=L,\ L\neq 0, \text{ and } \lim(x\to c)g(x)=0, \text{ then } \lim(x\to}$

$\boxed{x)f(x)/g(x)=\text{doesn't exist.}}$也就是不滿足分母的極限不爲0。若分子的極限爲0，則不一定。

pf:assume $\lim(x\to x)f(x)/(x)=M$

要用 g(x)的極限，所以要寫 If~then 相乘的極限存在等於極限相乘。

$\because \lim(x\to c)g(x)=0$

$\therefore \lim(x\to c)[f(x)/g(x)\times g(x)]=M\times 0=0$

因爲跟所以是一起的，且因爲不可以，要寫推得？

$\Rightarrow \lim(x\to c) f(x)=0(\to\leftarrow)$矛盾

L7 極限的四則運算 極限的多項式

Therefore lim(x→x)f(x)/g(x)=doesn’t exist!

e.g.

① Compute lim(x→1)(x→$5x^2$-12x+2)=?

Pf: ∵$5x^2$-12x+2 is a polynomial.

∴Pn(x→1)($5x^2$-12x+2)=5×1-12×1+2=-5

② Compute lim(x→3)[(x^2+5x+7)/(x-1)]=？

pf: ∵(x^2+5x+7)/(x-1) is defined at 3.

∴lim(x→3) (x^2+5x+7)/(x-1)=(3^2+15+7)/2=31/2

Ex:P79(6.21.33.34.38.43~52.55)

補充題

Let lim(x→c)f(x)=5 and lim(x→c)g(x)=1.Use the definition to prove lim(x→1)[3f(x)-g(x)] =14.